

## **Estado Limite Último – Flexão Simples em Peças Protendidas**

Roberto Buchaim

*Prof. Dr. da Universidade Estadual de Londrina*

*email: [robbuch@uel.br](mailto:robbuch@uel.br)*

*Palavras Chaves: Protensão, Estado próprio de tensões, Neutralização, Dimensionamento*

### **Resumo**

O presente trabalho ocupa-se do Estado Limite Último – Flexão Simples de peças de concreto protendido, com armadura aderente. A ênfase é posta na ação da protensão, tomando-se como referências, no item 2, os trabalhos de Marti, P. e de Kaufmann, W.. No trabalho do primeiro é utilizada uma estrutura simples para gerar um estado próprio de tensões através de ciclos de carga e descarga, e para obter a curva carga-deslocamento, e, portanto, sua capacidade portante. Com isto, fica visível que a protensão tem influência nos deslocamentos da estrutura, mas não tem qualquer influência na capacidade portante, nem no mecanismo de colapso, embora não desapareça quando se forma este mecanismo. Na parte seguinte, considera-se a obtenção da deformação de neutralização, distinguindo-se os casos de pós-tração e de pré-tração, para obter depois uma expressão única dessa deformação nos casos de uma só camada de armadura, atendendo às duas modalidades de protensão. Procura-se esclarecer, ainda, as duas alternativas de dimensionamento da seção transversal no Estado Limite Último – Flexão Simples, destacando-se o fato do momento resistente da seção independender completamente da protensão. Mostra-se que no caso de protensão de peças hiperestáticas – quando está presente também o estado próprio de tensões global –, por não influírem na capacidade resistente da estrutura, os esforços hiperestáticos de protensão devem ter um coeficiente de segurança próximo da unidade, pois isto conduz a um arranjo favorável da armadura. Na realidade, a escolha deste coeficiente no ELU poderia ser arbitrária, correspondendo à escolha também arbitrária da linha de fecho do diagrama de momentos fletores, no caso de estruturas hiperestáticas. Isto é possível, desde que haja suficiente capacidade de rotação plástica nas seções críticas, até a formação do mecanismo de colapso previsto. Por fim, apresenta-se um exemplo de dimensionamento da seção transversal no ELU-Flexão Simples, com armadura ativa ou com armadura mista compondo a totalidade da força resistente do banzo tracionado.

## 1 Introdução

O presente trabalho descreve a ação da protensão em peças fletidas, com vistas ao dimensionamento no Estado Limite Último – Flexão Simples. A protensão, como se sabe, representa um estado próprio de tensões local (esforços solicitantes nulos na seção transversal) e global (as reações de apoio formam um sistema de forças estaticamente nulo). Para compreender melhor sua influência no ELU, é dado um exemplo de estrutura hiperestática em que aparece esse estado, e do qual se obtém a capacidade portante. Na sequência, estuda-se o Estado de Neutralização da seção transversal, em que são nulas as tensões na seção de concreto (armado), e que é, por isso mesmo, tomado como referência de medida de deformações nos materiais, uma vez que nas normas o ELU por solicitações normais baseia-se em deformações limites (nominais). Com isto, o dimensionamento da seção à flexão simples pode ser feito por dois caminhos: no primeiro, como no concreto armado, considera-se o diagrama constitutivo completo da armadura protendida, no segundo desconta-se desse diagrama o estado de neutralização, passando-se a força de neutralização para o lado dos esforços solicitantes.

## 2 O Estado Próprio de Tensões

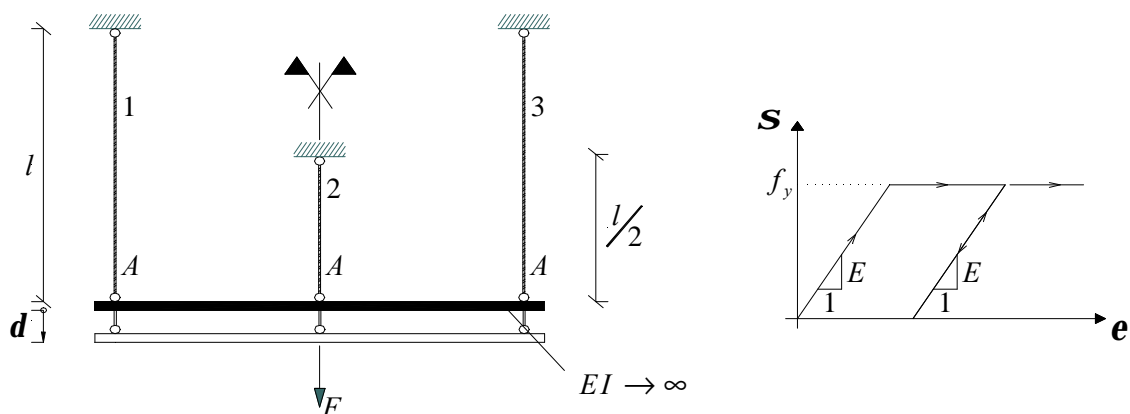


Fig. 11: Estrutura uma vez hiperestática, material elasto-plástico perfeito (cf. Marti, P. (1.999)).

A teoria exposta neste item utiliza os trabalhos de trabalhos de Marti, P. e de Kaufmann, W. (1.999), nos quais estão discutidos os conceitos necessários para compreender o comportamento estrutural das peças protendidas. Seja a estrutura simétrica e uma vez hiperestática da Fig. 11, sujeita à carga vertical  $F$ . A lei constitutiva considerada corresponde a material elasto-plástico perfeito, de módulo de elasticidade  $E$  e resistência ao escoamento  $f_y$ . Supõe-se que as barras estejam livres de tensão ao iniciar-se o carregamento, e que não haja qualquer problema de instabilidade. Das condições de equilíbrio e de compatibilidade resultam forças iguais nas barras 1 e 3, e a força na barra 2, antes de haver escoamento, é o dobro destas, pois seu comprimento é a metade dos comprimentos das demais. Como as barras são de mesmo material e mesma área, o escoamento ocorre primeiro na barra 2, onde se dá a maior força. A carga  $F_y$  e o

deslocamento  $d_y$  correspondentes ao início do escoamento da estrutura são obtidos fazendo-se  $N_2 = Af_y$ , donde  $F_y = 2Af_y$  e  $d_y = \frac{f_y l}{2E}$ . Para cargas  $F > F_y$ , a força na barra 2 é constante e conhecida. Logo, a estrutura tornou-se isostática, pois a condição de compatibilidade não precisa ser usada na determinação das forças nas barras, embora continue válida.

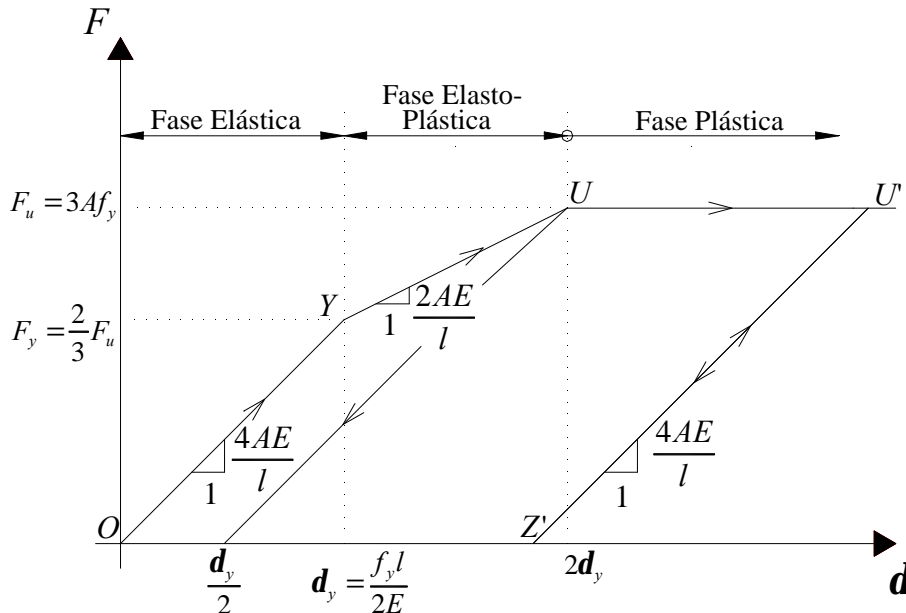


Fig. 2: Fases do comportamento estrutural (cf. exemplo de Marti, P., (1.999)).

Quando as forças nas barras 1 e 3 atingirem o valor  $Af_y$  tem-se a carga última  $F_u = 3Af_y$ , a máxima possível na estrutura. Esta carga é a sua *capacidade portante ou capacidade de carga*. No intervalo  $(F_y, F_u)$  as barras 1 e 3 são as únicas que permanecem elásticas, a rigidez da estrutura conta apenas com essas duas barras. Para atingir  $F_u$  a partir de  $F_y$ , as barras 1 e 3 sofrem um acréscimo na força normal igual a  $\Delta N_1 = \Delta N_3 = Af_y - \frac{Af_y}{2}$ . O correspondente acréscimo no deslocamento a partir de  $d_y$  é igual a  $\frac{\Delta N_1 l}{EA} = \frac{f_y l}{2E}$ .

Adicionando este valor a  $d_y = \frac{f_y l}{2E}$  obtém-se  $d_u = \frac{f_y l}{E}$ . Neste primeiro carregamento da estrutura, para  $F$  crescente de 0 a  $F_u$ , distinguem-se, portanto, 3 fases: na 1a. fase,  $F \leq F_y$ , a estrutura é totalmente elástica; na 2a. fase a estrutura é elasto-plástica,  $F_y \leq F \leq F_u$ , fase também chamada de *escoamento controlado*; e na 3a. fase,  $F = F_u$ , a estrutura é totalmente plástica. Esta é a chamada fase de *escoamento livre*, pois o deslocamento pode teoricamente crescer livremente sem aumento da carga. Ver a Fig. 2.

Considere-se a seguir a descarga total da estrutura a partir de um ponto  $U'$  qualquer da fase plástica, cf. a Fig. 2. Isto corresponde a superpor ao carregamento anterior a carga  $-F_u$ . Como as três barras descarregam-se *elasticamente*, a partir do patamar de escoamento da lei  $s(\epsilon)$ , Fig. 1, resulta na curva  $F(d)$  da Fig. 2 uma reta  $U'Z'$  paralela a

OY. Os acréscimos de forças normais e deslocamento para a carga  $-F_u$  são, portanto, iguais a  $\Delta N_1 = \Delta N_3 = -\frac{F_u}{4} = -\frac{3}{4}Af_y$  e  $\Delta N_2 = -\frac{3}{2}Af_y$ ,  $\Delta d = -\frac{F_u l}{4EA}$ . Somando os acréscimos de força normal ao valor anterior  $Af_y$ , resultam  $N_1 = N_3 = \frac{Af_y}{4}$  e  $N_2 = -\frac{Af_y}{2}$ , com o que as barras 1 e 3 estão tracionadas e a barra 2 está comprimida. Se a descarga ocorresse a partir do ponto U do início da 3a. fase, haveria um deslocamento residual na estrutura igual a  $2d_y - \frac{3}{2}d_y = \frac{d_y}{2} = \frac{f_y l}{4E}$ . Estes resultados mostram que após completar o ciclo de carga e descarga, i. e.,  $F = F_u - F_u = 0$ , há forças normais nas barras, que porém estão em equilíbrio entre si. Tem-se assim um *estado próprio de tensões* global: há tensões na estrutura, mas não há carga aplicada, e as reações de apoio formam um sistema de forças estaticamente nulo.

O segundo ciclo de carga e descarga deve levar em consideração as forças do estado próprio de tensões, para atingir-se a 3a. fase novamente. Da Fig. 2, é visível que os novos ciclos, a partir do ponto Z' até U', ocorrem para a estrutura totalmente elástica, por causa do estado próprio de tensões, cujas forças somam zero. Para acréscimos de carga, obtém-se, pondo  $\Delta F = F_u = 3Af_y$ ,  $\Delta N_1 = \Delta N_3 = \frac{3}{4}Af_y$ ,  $\Delta N_2 = \frac{3}{2}Af_y$ . As forças finais nas barras, correspondentes a carregar a estrutura pela segunda vez, resultam somando-se estes acréscimos às forças do estado próprio de tensões, e são iguais a  $N_1 = N_2 = N_3 = Af_y$ . Logo, obtém-se novamente  $N_1 + N_2 + N_3 = 3Af_y = F_u$ .

Estes resultados evidenciam o seguinte:

- 1- Após a plastificação total do primeiro ciclo de carga e descarga a estrutura comporta-se elasticamente até sua capacidade portante. Diz-se, então, que a estrutura sofreu uma *acomodação* em relação ao carregamento dado.
- 2- O estado próprio de tensão influi na curva carga-deslocamento. *Não tem, porém, qualquer influência na capacidade portante da estrutura, nem no mecanismo de colapso.*
- 3- *Quando a estrutura atinge sua capacidade portante ( $F = F_u$  no exemplo), o estado próprio de tensões não desaparece*, como se poderia pensar frente à plastificação total da estrutura, ou, dito de outro modo, frente à formação de um mecanismo de colapso. Isto fica mais aparente se houver a descarga da estrutura, quando restam nas barras somente as forças normais do estado próprio de tensões (excluída a possibilidade do material atingir uma deformação limite no patamar da lei  $s(e)$ ).

Este fato, como o anterior, tem extrema importância nas peças protendidas, notando-se que a lei constitutiva  $s(e)$  anterior é substituída, neste caso, pelo diagrama momento-curvatura, que se pode admitir com a mesma forma. Se estes fatos forem transpostos para vigas contínuas, p. ex., a premissa análoga é a de haver suficiente capacidade de rotação plástica nas seções críticas até formar-se um mecanismo, i. e., até o *início* da formação da *última rótula plástica*. Além disso, se fosse possível a descarga total da estrutura a partir da formação do mecanismo, ainda assim permaneceriam as reações de apoio correspondentes ao estado próprio de tensões global.

Quanto à consideração do coeficiente de ponderação da protensão,  $g_p$ , a ser aplicado nos esforços hiperestáticos de protensão no ELU, especialmente nos momentos fletores, correspondem esses esforços à fixação *arbitrária* de uma linha de fecho do diagrama de momentos fletores, e então esse coeficiente poderia ser qualquer, pois tais esforços – por decorrerem de um estado próprio de tensões – não têm nenhuma influência na capacidade portante. Ocorre que a escolha de  $g_p=1$ , o que significa que os esforços hiperestáticos de protensão permanecem praticamente constantes à medida que o carregamento é majorado até o ELU, produz uma distribuição favorável das armaduras, diminuindo as dos apoios de continuidade (geralmente as maiores) e aumentando as dos vãos. A NBR6118 considera dois valores para  $g_p$ , a saber, 1,2 para os casos em que os efeitos da protensão são desfavoráveis (p. ex., na fase em vazio, em que a protensão é *maximizada* e os efeitos das cargas *minimizados*), e 0,9 para os casos em que são favoráveis (p. ex., após todas as perdas, com a protensão *minimizada* e os efeitos as cargas *maximizados*). Observe-se, novamente, que está pressuposto haver suficiente capacidade de rotação plástica na estrutura.

Para finalizar este item, pode-se notar que as presentes conclusões são também válidas para o estado próprio de tensões *local*. Basta na Fig. 1 imaginar as três barras justapostas e aderentes entre si, de modo a formar uma única barra composta de dois materiais distintos, e neste caso seria nula a reação de apoio (e não a soma das reações de apoio). Mostra-se adiante, de outro modo, que a protensão não tem qualquer influência no momento resistente da seção.

### **3 O Estado de Neutralização**

O estado próprio de tensões local gerado pela protensão corresponde a uma diferença de deformações entre os dois materiais. Nas peças pré-fabricadas em pistas esta diferença é precisamente o pré-alongamento do aço *antes* da transferência da força de protensão dos apoios externos para as peças de concreto, uma vez que nessa situação a deformação do concreto é nula. Já na pós-tração a introdução da protensão se dá com o *alongamento do aço simultâneo com o encurtamento do concreto*. Tendo em vista esta diferença entre as duas modalidades de protensão, elas são tratadas em separado, para ao final serem consideradas de uma só maneira no caso de uma só camada de armadura. As perdas progressivas de protensão serão consideradas adiante.

Seja a seção transversal da Fig. 3, de uma peça protendida em pós-tração, e sujeita apenas à ação da força de protensão  $P_0$ , já consideradas as perdas imediatas. O Estado de Neutralização, que se calcula a seguir, consiste em anular as tensões e deformações na seção de concreto (com ou sem a armadura passiva), para que a partir desse estado nulo se possa medir as deformações até o ELU por solicitações normais, que nas normas é baseado em deformações limites. Na armadura de protensão, a deformação de neutralização, correspondente a esse estado nulo, deve ser somada ao *acréscimo de deformação sofrido pelo concreto vizinho da armadura* (por sua vez limitado em  $10^0/_{00}$ ).

Deixando de lado a armadura passiva, para simplificar a explanação, obtém-se tensões nulas na seção de concreto aplicando-se nela, ao nível da armadura, a força  $P_0$ , produzindo-se nessa fibra o *alongamento*  $-e_{cp}$ , justamente o oposto do encurtamento produzido pela protensão. Para que a armadura acompanhe esse alongamento, nela aplica-se também a força  $E_p A_p (-e_{cp})$ . A soma destas duas parcelas é a força de

neutralização,  $P_n$ , artificialmente introduzida para eliminar as tensões e deformações no concreto advindas do estado próprio de tensões local.

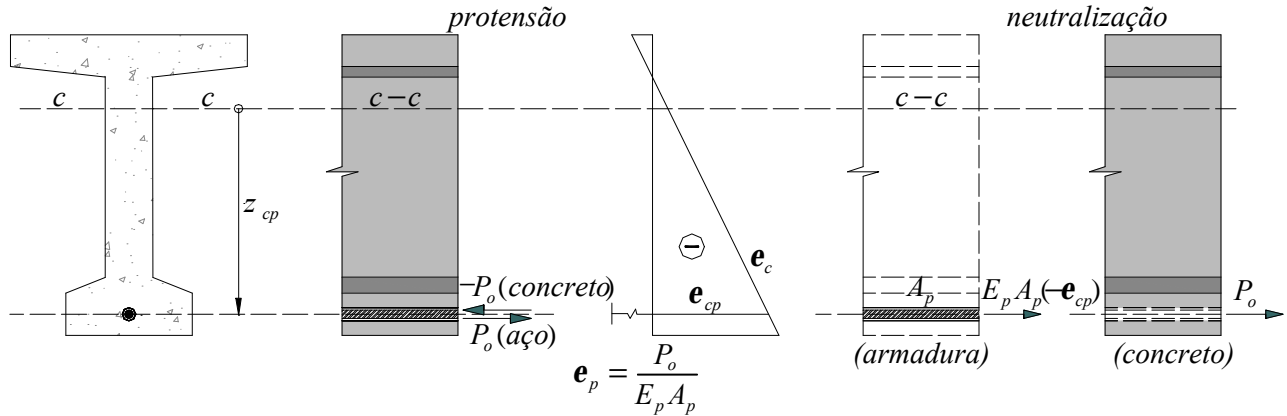


Fig. 3

Sendo

$$e_{cp} = -\frac{P_0}{E_c A_c} \left(1 + \frac{z_{cp}^2}{r_c^2}\right) \quad (1)$$

resultam a força e a deformação de neutralização iguais a:

$$P_n = P_0 (1 + a_{11,c}) \quad (2)$$

$$e_{pn} = \frac{P_0}{E_p A_p} - e_{cp} = \frac{P_n}{E_p A_p} \quad (3)$$

Em (2) o coeficiente  $a_{11,c}$  é igual a:

$$a_{11,c} = a_p r_p \left(1 + \frac{z_{cp}^2}{r_c^2}\right) \quad (4)$$

com o coeficiente de equivalência e a taxa geométrica da armadura de protensão dados por

$$a_p = \frac{E_p}{E_c} \quad \text{e} \quad r_p = \frac{A_p}{A_c} \quad (5a) \text{ e } (5b)$$

O sub-índice  $c$  refere-se à seção líquida de concreto (seria a seção de concreto armado,  $cs$ , se fosse incluída a armadura passiva).

Após as perdas progressivas, há uma queda na força de protensão,  $\Delta P_{sh+c+r} (< 0)$ , simultânea com uma queda de compressão no concreto,  $-\Delta P_{sh+c+r} (> 0)$ , aplicada ao nível da armadura protendida. Logo, tem-se aqui também um estado próprio de (variação) de tensões, como na protensão. Observe-se, ainda, que na dedução dessa perda, impõe-se a *igualdade de variação de deformação* na armadura protendida e no concreto vizinho ao longo do tempo, pelos fenômenos de retração e de fluência do concreto e pela relaxação do aço, uma vez que se supôs haver aderência entre ambos materiais. Com isto, a diferença de deformações entre os materiais vizinhos *continua a mesma*, mas agora inclui implicitamente a variável tempo. Entretanto, *para efeito de dimensionamento no ELU-Flexão Simples não se considera a variação de deformação ao longo do tempo, simplesmente porque sua influência na resistência da seção é pequena*, no caso de escoamento da armadura do banzo tracionado. Só se considera, então, a variação de força  $\Delta P_{sh+c+r}$ , ou de tensão  $\Delta \sigma_{p,sh+c+r} = \frac{\Delta P_{sh+c+r}}{A_p}$ , na determinação do estado de neutralização. Logo, as equações anteriores mudam para as seguintes:

$$P_n = (P_0 + \Delta P_{sh+c+r})(1 + a_{11,c}) \quad (6)$$

$$e_{pn} = \frac{P_0 + \Delta P_{sh+c+r}}{E_p A_p} (1 + a_{11,c}) \quad (7)$$

Na pré-tração, como se disse, o pré-alongamento é igual ao alongamento inicial da armadura na pista antes da sua liberação dos apoios externos, pois o concreto tem deformação nula, donde:

$$P_n = P_i \text{ e } e_{pn} = e_{pi} = \frac{P_i}{E_p A_p} \quad (8) \text{ e } (9)$$

Com objetivo de incluir na força de neutralização a queda na força de protensão que ocorre ao longo do tempo, considere-se antes a determinação da força na armadura,  $P_0$ , após o encurtamento elástico decorrente da aplicação da força inicial  $-P_i$  na seção ideal, cf. a Fig. 4. Como o encurtamento do concreto ao nível da armadura é igual a:

$$e_{cp} = -\frac{P_i}{E_c A_i} \left(1 + \frac{z_{ip}^2}{r_i^2}\right) \quad (10)$$

onde  $r_i = \sqrt{I_i / A_i}$  é o raio de giração da seção ideal, resulta a seguinte força na armadura após esse encurtamento (com o coeficiente de equivalência  $a_p = E_p / E_c$  e a taxa geométrica da armadura protendida, referida agora à seção ideal,  $r_p = A_p / A_i$ ):

$$P_0 = P_i + E_p A_p e_{cp} = P_i \left[1 - a_p r_p \left(1 + \frac{z_{ip}^2}{r_i^2}\right)\right] \quad (11)$$

Pondo

$$a_{11,i} = a_p r_p \left(1 + \frac{z_{ip}^2}{r_i^2}\right) \quad (12)$$

tem-se na armadura a força após o encurtamento elástico inicial dada por

$$P_0 = P_i(1 - a_{11,i}) \quad (13)$$

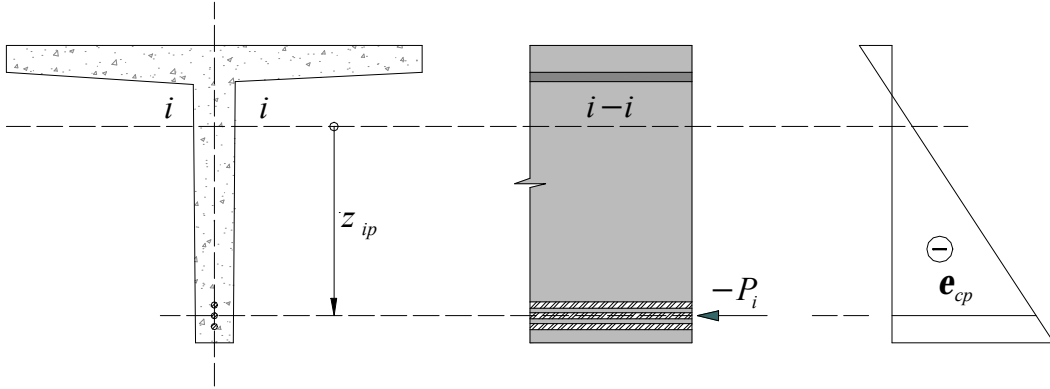


Fig. 4

A inclusão da queda progressiva de força  $\Delta P_{sh+c+r}$ , desconsiderada a correspondente variação de deformação ao longo do tempo, pode ser feita observando-se que após essa perda resta na armadura a força  $P_0 + \Delta P_{sh+c+r}$ . A esta força menor equivale haver na pista de protensão – como se a peça após as perdas progressivas a ela voltasse – a força e a deformação seguintes:

$$P_n = P_i + \frac{\Delta P_{sh+c+r}}{1 - a_{11,i}} = \frac{P_0 + \Delta P_{sh+c+r}}{1 - a_{11,i}} \quad (14)$$

$$e_{pn} = e_{pi} + \frac{\Delta P_{sh+c+r}}{E_p A_p (1 - a_{11,i})} = \frac{P_0 + \Delta P_{sh+c+r}}{E_p A_p (1 - a_{11,i})} \quad (15)$$

Se houver duas (ou mais) camadas de armadura protendida (Fig. 5) tem-se um sistema de equações nas incógnitas  $\Delta P_{n1}$  e  $\Delta P_{n2}$ , que representam a variação das forças de neutralização provenientes das variações das forças de protensão  $\Delta P_{sh+c+r,1}$  e  $\Delta P_{sh+c+r,2}$ :

$$(1 - a_{11})\Delta P_{n1} - a_{12}\Delta P_{n2} - \dots = \Delta P_{sh+c+r,1} \quad (16)$$

$$-a_{21}\Delta P_{n1} + (1 - a_{22})\Delta P_{n2} - \dots = \Delta P_{sh+c+r,2}$$

Nestas equações os coeficientes  $a_{jk}$  são dados por:



$$a_{jk} = a_p r_{pj} \left( 1 + \frac{z_{p,ij} z_{p,ik}}{r_i^2} \right) \quad (17)$$

onde a taxa geométrica é igual a  $r_{pj} = A_{pj} / A_i$ , o sub-índice  $i$  indica seção ideal e os sub-índices  $j$  e  $k$  indicam camadas de armadura protendida. Ver a Fig. 5.

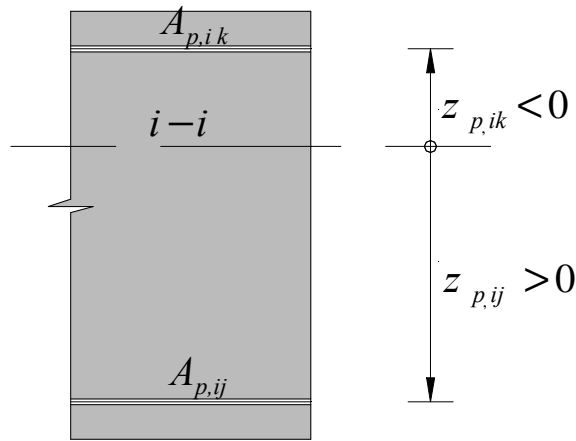


Fig. 5

Considerando os casos de uma camada de armadura protendida, e notando-se que, sendo  $a_{11,i}$  usualmente baixo, cerca de 5% a 10%, o coeficiente  $1/(1-a_{11,i})$  de (14) e (15) pode ser aproximado para  $(1+a_{11,i})$ , tem-se uma só expressão da deformação de neutralização para a pós-tração e a pré-tração:

$$e_{pn} = \frac{P_0 + \Delta P_{sh+c+r}}{E_p A_p} (1 + a_{11}) \quad (18)$$

cabendo considerar em  $a_{11}$ , se for o caso, os dados da seção de concreto na pós-tração ( $a_{11,c}$ ) ou da seção ideal na pré-tração ( $a_{11,i}$ ), mas geralmente basta usar os dados da seção da peça.

Uma estimativa rápida da deformação de neutralização, após as perdas imediatas e progressivas, supostas iguais respectivamente a 10% e 15% da força inicial, pode ser feita nos casos usuais através da expressão:

$$e_{pn} \cong \frac{0,7 f_{ptk}}{E_p} 0,9 \times 0,85 \times 1,05 = 0,56 \frac{f_{ptk}}{E_p} \quad (19)$$

Com estas expressões fica determinado o Estado de Neutralização, artificialmente introduzido através da força  $P_n$ , com o intuito de anular as tensões e deformações na seção de concreto. Para não violar o equilíbrio, retira-se essa força, aplicando-se  $-P_n$  na fibra onde se posiciona a armadura protendida, juntamente com o momento fletor proveniente das demais ações. Ver a Fig. 6, onde estão indicadas duas fases de solicitações: na primeira tem-se unicamente a força de neutralização aplicada no *tirante*

formado pela armadura protendida, e na segunda tem-se as *solicitações de flexo-compressão na seção completa*. Tratando-se de ELU, as solicitações são consideradas com seus valores de cálculo,  $M_d$  e  $g_p P_n$  (nas duas fases).

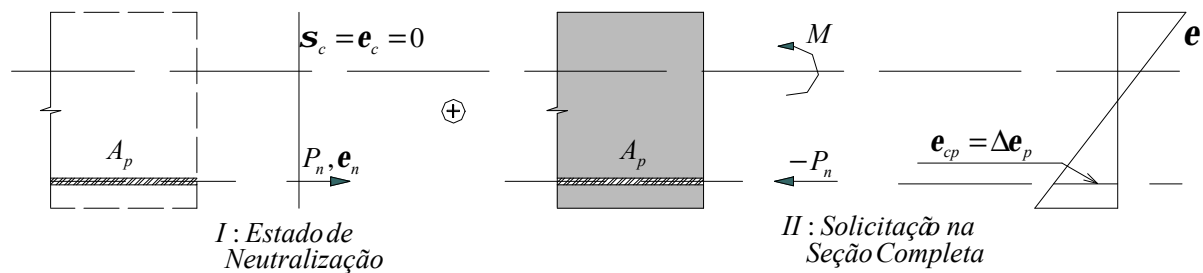


Fig. 6

## 4 Dimensionamento no ELU – Flexão Simples

Considere-se uma viga protendida em pré-tração ou em pós-tração com aderência posterior, sujeita à flexão *simples*. O dimensionamento da seção crítica, em face da existência de aderência, segue as mesmas hipóteses feitas para o concreto armado, com algumas considerações adicionais específicas do concreto protendido, a saber: (1) a neutralização da seção, já mostrada no item anterior; (2) a possibilidade de armadura mista, ativa e passiva, na composição do banzo tracionado.

A Fig. 7 mostra a lei constitutiva do aço de protensão a ser considerada no dimensionamento, ressaltando-se nesse diagrama a separação nas duas fases descritas na Fig. 6. O segmento  $ON$  representa a parte do diagrama  $s_p(e_p)$  consumida na neutralização da seção (e portanto na protensão), os segmentos restantes  $NY$  e  $YU$  compõem a parte complementar, como se a armadura fosse passiva. No ELU é mais desfavorável considerar a neutralização da seção após as perdas progressivas. Nos casos de verificação do ELU de Ruptura no Ato da Protensão, estas perdas são, em geral, desconsideradas, pois são ainda incipientes. Com as perdas progressivas há queda na tensão de protensão, e portanto, na tensão de neutralização, restando com isso um acréscimo maior de deformação da armadura,  $\Delta e_{pd}$  na Fig. 7, contado a partir do ponto  $N$ , até a ultrapassagem do escoamento, ponto  $Y$ , condição que se pressupõe no ELU-Flexão Simples.

A Fig. 8 mostra a seção crítica no ELU com a separação nas duas fases mencionadas, a qual permite considerar a protensão de duas maneiras distintas, conduzindo ambas ao mesmo resultado. Em *I* tem-se um *tirante*, de área  $A_p$ , tensão  $g_p s_{pn} = g_p P_n / A_p$  e alongamento  $e_{pnd} = g_p s_{pn} / A_p$ ; em *II* tem-se a seção toda sujeita a *flexo-compressão*, com um acréscimo de alongamento no banzo tracionado igual ao alongamento do

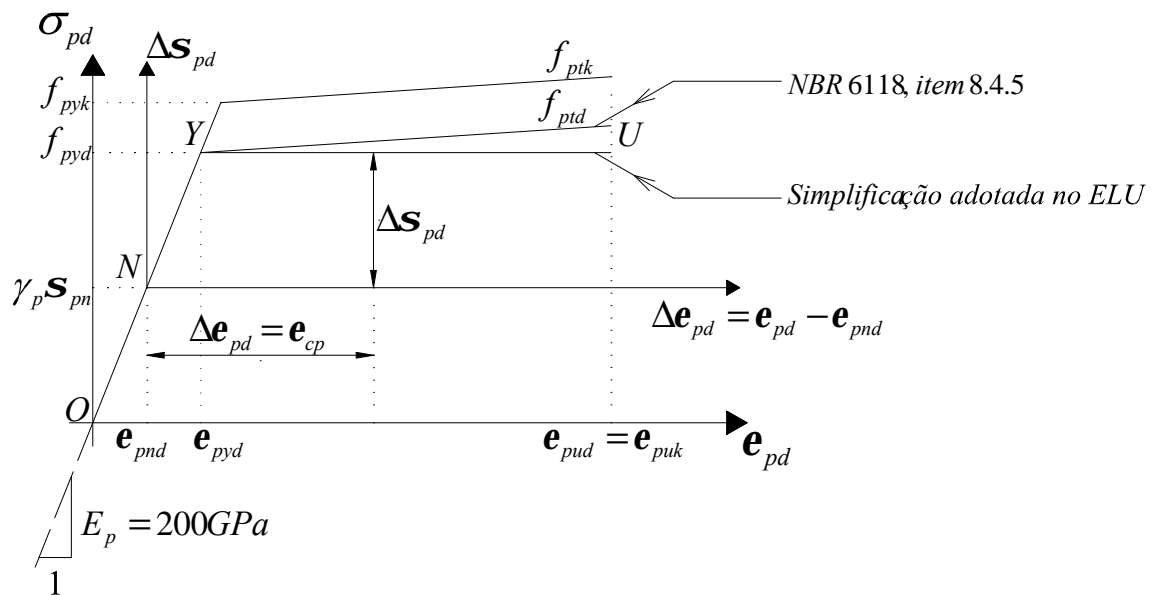


Fig. 7

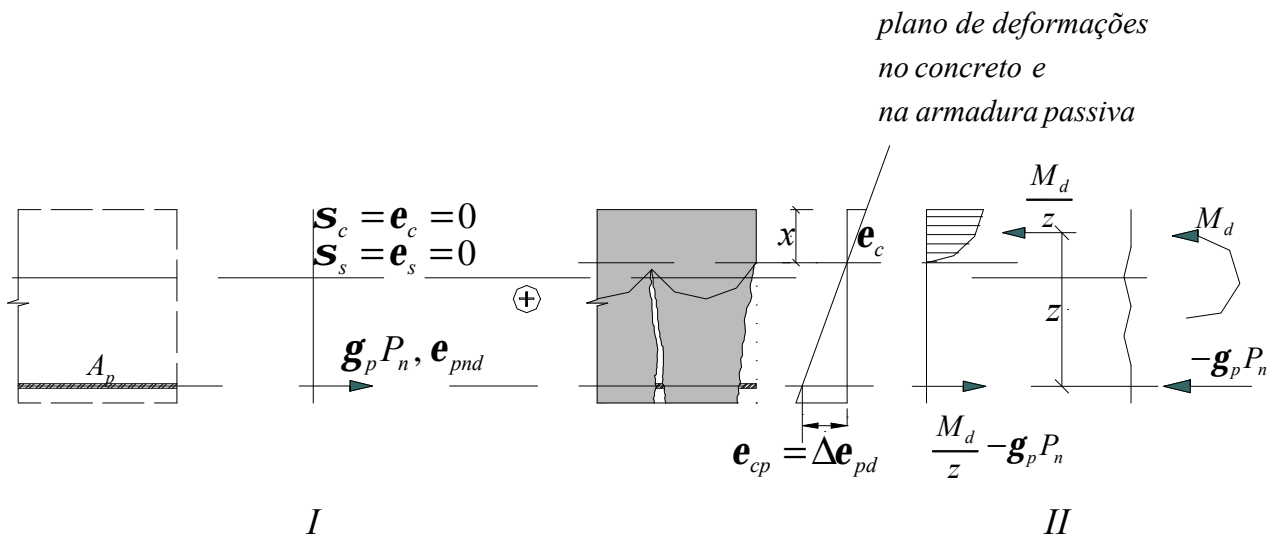


Fig. 8

concreto vizinho à armadura protendida,  $e_{cp} = \Delta e_{pd}$ , necessário para que o escoamento da armadura seja ultrapassado.

A Tabela 7.1 mostra as duas fases, e a superposição de ambas. Como se vê na última linha desta tabela, a *protensão não altera o momento resistente da seção*, igual a  $M_d = A_p f_{pyd} z$ , e este momento é alcançado seja a força de protensão ( $e$ , portanto,  $P_n$ ) nula ou não. Entretanto, se a força de protensão for nula, a seção atende o *ELU – Flexão Simples*, mas não atende outros Estados Limites de Serviço, porque, **tendo sido eliminado o estado próprio de tensões** (local, e também global no caso de peças hiperestáticas), a peça é excessivamente esbelta para comportar-se como concreto armado.

Tabela 1

Fase	Força na Armadura		Observação
	Solicitante	Resistente	
<i>I</i>	$\mathbf{g}_p P_n =$	$A_p (\mathbf{g}_p \mathbf{s}_{pn})$	Tirante
<i>II</i>	$\frac{M_d}{z} - \mathbf{g}_p P_n =$	$A_p \Delta \mathbf{s}_{pd}$	Flexo-compressão
Soma	$\frac{M_d}{z} =$	$A_p (\mathbf{g}_p \mathbf{s}_{pn} + \Delta \mathbf{s}_{pd}) =$ $A_p f_{pyd}$	Flexão simples

A separação em duas fases das Figuras 7 e 8 e da Tabela 1 permite entender com clareza as duas alternativas de dimensionamento da seção transversal. Na primeira alternativa, usa-se o diagrama completo  $\mathbf{s}_{pd}(\mathbf{e}_{pd})$ , correspondendo à flexão simples considerada, (*I* + *II*). Entretanto, como as deformações até o ELU são medidas na seção de concreto (simples ou armado) a partir do estado de neutralização, soma-se à deformação de neutralização o acréscimo de alongamento na armadura protendida, como no concreto armado, obtendo-se com isso a deformação total do aço, o qual deve estar em escoamento:

$$\mathbf{e}_{pd} = \mathbf{e}_{pnd} + \Delta \mathbf{e}_{pd} > \mathbf{e}_{pyd} \quad (20)$$

A segunda alternativa é usada quando se trata a *protensão como carga*, e leva em conta a parte da lei constitutiva do aço equivalente à de uma armadura passiva, dada por  $\Delta \mathbf{s}_{pd}(\Delta \mathbf{e}_{pd})$ , cf. a Fig. 7. Considera-se assim apenas a fase *II*, na qual a seção está sujeita a flexo-compressão. A vantagem desta alternativa consiste em ter-se a força de compressão,  $-\mathbf{g}_p P_n$ , posicionada desde logo no banzo tracionado, compondo assim uma parcela (subtrativa) da força resistente advinda do momento fletor atuante. Portanto, *lida-se apenas com  $M_d$  na determinação da profundidade da linha neutra, da força no banzo comprimido e do braço de alavanca entre as forças dos banzos*. Neste caso, a condição de escoamento é escrita passando-se na desigualdade (20) a deformação de neutralização para o lado direito:

$$\Delta \mathbf{e}_{pd} > \mathbf{e}_{pyd} - \mathbf{e}_{pnd} \quad (21)$$

Esta alternativa tem a desvantagem de ocultar, na flexão simples, o fato de serem iguais as forças resistentes dos dois banzos. Conforme se vê na Tabela 1, a força no banzo tracionado da fase *II* é menor que a força no banzo comprimido, de uma quantia igual a  $\mathbf{g}_p P_n$ , pois a fase *I* está ausente.

Note-se que é preciso conhecer a deformação de neutralização em ambas alternativas e o dimensionamento final – do qual resulta a armadura exigida no ELU – deve ser coerente com os dados do Estado de Neutralização. Se a armadura for estabelecida por outros estados limites, de serviço ou mesmo últimos, que não o de flexão simples, então basta comprovar que a nova armadura possui área igual ou inferior à pré-estabelecida.

A consideração de armadura mista, ativa (de área  $A_p$  e resistência ao escoamento  $f_{pyd}$ ) e passiva (de área  $A_s$  e resistência ao escoamento  $f_{yd}$ ), na composição da força resistente do banzo tracionado se faz sem maior dificuldade, p. ex., com o auxílio do conceito de *grau de protensão, GP*, definido pela seguinte expressão:

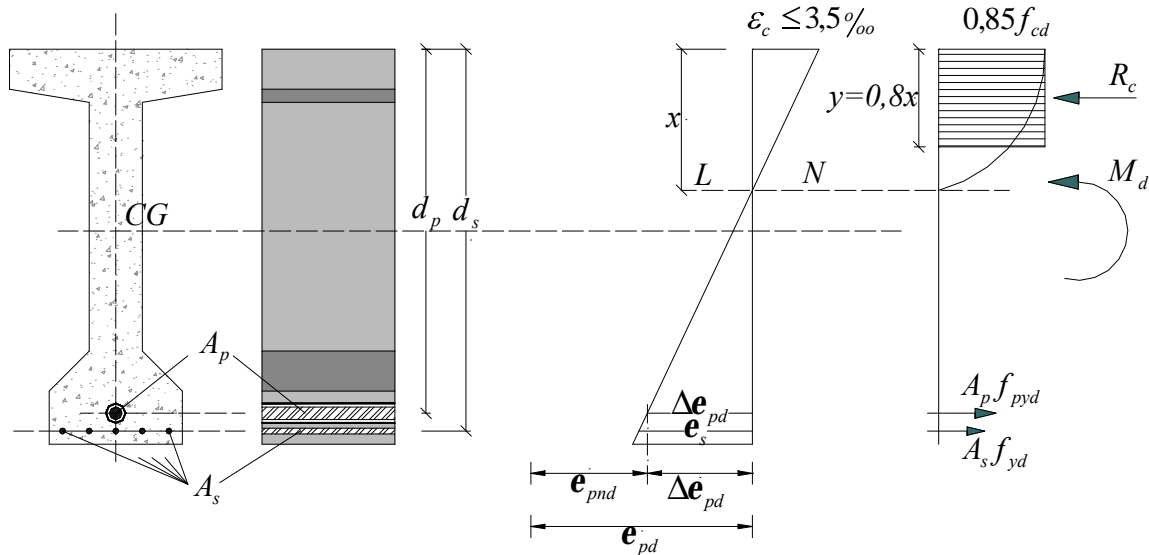


Fig. 9

$$GP = \frac{A_p f_{pyd}}{A_s f_{yd} + A_p f_{pyd}} \quad (22)$$

igual a 0 se  $A_p = 0$  (só há armadura passiva, correspondendo ao concreto armado), e igual a 1 se  $A_s = 0$  (só há armadura ativa). É possível, ainda, trabalhar com uma armadura total passiva *equivalente em força resistente* à armadura mista, definida como segue:

$$A_{s,eq} = A_p \frac{f_{pyd}}{f_{yd}} + A_s \quad (23)$$

Alternativamente, pode-se trabalhar com uma armadura total ativa equivalente.

No dimensionamento das áreas das armaduras há agora três incógnitas (a profundidade da linha neutra, e as duas áreas  $A_p$  e  $A_s$ ) para as duas equações de equilíbrio na seção: a de força normal ( $=0$ , na flexão simples) e a de momento fletor. Logo, para haver solução única deve-se introduzir uma informação nova, p. ex., fixando-se o grau de protensão. A Fig. 9 reúne os principais dados do problema. Para o concreto pode-se usar o bloco retangular de tensões e para os aços admite-se a lei bilinear sem encruamento (i. e., o segmento plastificado é horizontal, cf. a Fig. 7).

## 5 Exemplo

Considere-se uma viga isostática, protendida em pós-tração, e com aderência posterior. O vão da viga é igual a  $30m$ , a carga uniformemente distribuída vale  $g_k + q_k = 19,2KN/m$ , as resistências dos materiais são  $f_{ck} = 30MPa$ , CA-50 e CP-175 RB 11. A armadura prevista pelas condições de serviço consta de 2 cabos, cada qual com 12f11, perfazendo uma área total igual a  $A_p = 2 \times 852 = 1.704mm^2$ . A força de protensão na seção central após as perdas imediatas e progressivas é igual a  $P_0 + \Delta P_{sh+c+r} = 2.161 - 294 = 1.867KN$ . A distância do eixo 0-0 à armadura protendida é igual a  $z_{op} = 679,5mm$ , e o raio de giração da seção da peça vale  $r_0 = \sqrt{I_0/A_0} = 522,3mm$ . As distâncias das armaduras ativa e passiva à borda comprimida são, respectivamente, iguais a  $d_p = 1.390mm$  e  $d_s = 1.460mm$ . O coeficiente de equivalência e a taxa geométrica da armadura protendida são iguais a  $a_p = 200/26,3 = 7,6$  e  $r_p = A_p/A_0 = 1.704/487.500 = 0,35\%$ . Calcular, com estes dados, a armadura protendida necessária para atender o ELU – Flexão Simples, e verificar se a armadura estabelecida previamente é suficiente. Desprezar a armadura passiva (de início), bem como a mísula.

- (1) Deformação de neutralização após as perdas progressivas: com  $g_p = 0,9$ , obtém-se das equações (4) e (7), confundindo-se nesta última a seção de concreto com a da peça:

$$a_{11} = a_p r_p \left(1 + \frac{z_{op}^2}{r_0^2}\right) = 7,6 \frac{0,35}{100} \left(1 + \frac{679,5^2}{522,3^2}\right) = 0,072$$

$$e_{pnd} = g_p \frac{P_0 + \Delta P_{sh+c+r}}{E_p A_p} (1 + a_{11}) = 0,9 \frac{1.867 \times 10^3}{200 \times 10^3 \times 1.704} 1,072 = 5,3^0 /_{00}$$

(2) Momento  $M_d$  na seção central:  $M_d = g_f \frac{(g_k + q_k)l^2}{8} = 1,4 \frac{19,2 \times 30^2}{8} = 3.024KNm$

- (3) Força no banzo tracionado (Fig. 10): Para confirmar se o dimensionamento deve ser feito como seção T ou retangular, compara-se o momento fletor atuante com o resistido pela seção com a altura do bloco de tensões igual à altura da flange, i. e.,  $y = h_{fl}$ :

$$M_{d,y=h_{fl}} = 0,85 f_{cd} b_{fl} h_{fl} \left(d - \frac{h_{fl}}{2}\right) = 18,21 \times 800 \times 150 \times (1.390 - 75) = 2.874 \times 10^6 Nmm$$

Como  $M_d = 3.024KNm > M_{d,y=h_{fl}} = 2.874KNm$ , o dimensionamento é feito como seção T. A força e o momento resistidos pela seção 1 da flange fora da alma valem

$$R_{c1} = 0,85 f_{cd} (b_{fl} - b_w) h_{fl} = 18,214 \times (800 - 200) \times 150 = 1.639,3 \times 10^3 N \text{ e}$$

$$M_{d1} = R_{c1} z_{c1} = 1.639,3 \times 10^3 \times \left(1.390 - \frac{150}{2}\right) = 2.155,7 \times 10^6 Nmm$$

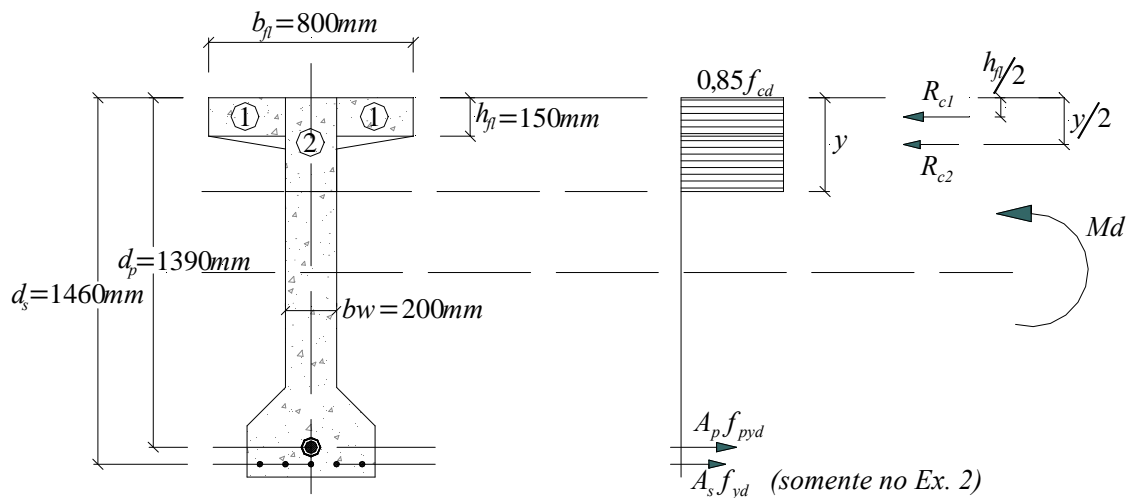


Fig. 10

Portanto, a seção retangular 2, formada pela alma, deve resistir à parcela restante

$$M_{d2} = M_d - M_{d1} = 3.024 - 2.155,7 = 868,3 \text{ KNm}$$

O correspondente valor adimensional deste momento é:

$$m_{d2} = \frac{M_{d2}}{0,85 f_{cd} b_w d^2} = \frac{868,3 \times 10^6}{18,214 \times 200 \times 1.390^2} = 0,123$$

Na seção retangular a força relativa no concreto, *igual à altura relativa do bloco de tensões*, liga-se ao correspondente momento relativo pela seguinte expressão:

$$n_c = \frac{y}{d} = \frac{R_c}{0,85 f_{cd} b_w d} = 1 - \sqrt{1 - 2m_d} \quad (24)$$

Esta expressão aplicada à seção retangular 2 resulta :  $n_{c2} = \frac{y}{d} = 1 - \sqrt{1 - 2 \times 0,123} = 0,132$

Donde a força de compressão na seção 2:  $R_{c2} = 0,132 \times 18,214 \times 200 \times 1.390 = 668,9 \times 10^3 \text{ N}$

O equilíbrio de forças normais leva à força atuante no banzo tracionado (com  $A_s = 0$  nesta primeira alternativa):  $R_p = R_{c1} + R_{c2} = (1.639,3 + 668,9) \times 10^3 = 2.308,2 \times 10^3 \text{ N}$

(4) Determinação da profundidade da LN e confirmação do escoamento da armadura.

A profundidade relativa da LN é igual a  $\frac{x}{d} = 1,25 \frac{y}{d} = 0,165 < \left(\frac{x}{d}\right)_{\text{limDom2}} = \frac{3,5}{13,5} = 0,259$ . Logo, a seção encontra-se no Domínio 2 e a deformação limite atingida é a do *concreto ao nível da armadura protendida*, i. e.,  $e_{cp} = \Delta e_p = 10^0 /_{00}$ . A deformação total da armadura

protendida é obtida com a Equação (20), com  $f_{pyd} = \frac{0,9 f_{ptk}}{g_s} = 1.369,6 \text{ MPa}$ :

$$e_{pd} = e_{pnd} + \Delta e_{pd} = (5,3 + 10)^0 /_{00} = 15,3^0 /_{00} > e_{pyd} = \frac{f_{pyd}}{E_p} = \frac{1.369,6}{200 \times 10^3} = 7,87^0 /_{00}$$

(5) Cálculo da área da armadura protendida: confirmado o escoamento da armadura,

$$\text{resulta } A_p = \frac{R_p}{f_{pyd}} = \frac{2.308,2 \times 10^3}{1.369,6} = 1.685 \text{ mm}^2.$$

Como a área da armadura existente,  $A_p = 1.704 \text{ mm}^2$ , é superior à exigida pelas condições do ELU, conclui-se que a seção tem segurança suficiente. Se fosse adotado um grau de protensão igual a 75%, com  $d_p = 1.390 \text{ mm}$  e  $d_s = 1.460 \text{ mm}$ , resultariam para a armadura ativa 2 cabos de 12f9,5 cada, CP-175 RB, perfazendo uma área total igual a  $A_p = 2 \times 12 \times 52,3 = 1.255 \text{ mm}^2$ , e para a armadura passiva  $A_s = 1.400 \text{ mm}^2$ , ou 7f16, CA-50.

## 6 Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **Cordoalhas de aço para concreto protendido**: NBR 7483, Rio de Janeiro, Jun 1991.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **Barras e fios de aço destinados a armaduras para concreto armado**: NBR 7480. Rio de Janeiro, Fev. 1996.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**: NBR6118: 2003. Rio de Janeiro, 2003.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DE LA PRECONTRAÎNTE. **Practical design of structural concrete**. London: SETO, 1999. FIP Recommendations.

LEONHARDT, F. **Construções de Concreto. Vol.5: Concreto Protendido**. Livros Técnicos e Científicos. Ed. S.A.

MARTI, P.; ALVAREZ, M.; KAUFMANN, W.; SIGRIST, V. **Tragverhalten von Stahlbeton**. Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich. IBK Publication SP-008, 1999.

VASCONCELOS, A. C. **Manual Prático para a Correta Utilização dos Aços no Concreto Protendido, em Obediência às Normas Atualizadas**. Cia. Belgo-Mineira. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1980.

WALTER, R.; MIEHLBRADT, M. **Dimensionnement des Structures en Béton**. Bases et Technologie. Traité de Génie Civil de l'Ecole Polytechnique de Lausanne. Vol. 7, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1990.